E. N. Météo Math 1 -1992-

DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1992
D'ELEVE-INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (I)

Durée : 3 heures Coefficient : 2

La notation prendra en compte la rigueur et la clarté des raisonnements et explications, ainsi que le soin apporté à la présentation.

- I -

1) Soit f une fonction réelle continuement dérivable sur un intervalle [a, b] fermé borné de $\mathbb{R}$. Montrer que:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow + \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \ dx = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2) On considère la fonction $F(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} \, du$

a) Montrer que $|F(x) - F(x')|$ tend vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+ \infty$

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \, du$ converge. On note A la valeur de cette intégrale.

c) Prouver que cette intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \, du$ n'est pas absolument convergente.

3) Soient b un nombre réel strictement positif et f une fonction réelle deux fois continuement dérivable sur [0, b]

a) Montrer que la fonction g définie sur [0, b] par:

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = f'(0) \end{cases}$$

est continuement dérivable sur [0, b]

T.S.V.P. ⟶

b) En déduire que $\lim_{n \to \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = A.f(0)$ $(n \in \mathbb{N})$

4) Soit f une fonction réelle 2 fois continuement dérivable sur $[0, \pi]$

a) Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x) \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} (f(x) + f(\pi-x)) \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

b) Montrer que la fonction h définie sur $[0, \pi/2]$ par:

$$\begin{cases} h(x) = (f(x) + f(\pi - x)) \frac{x}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(o) = f(o) + f(\pi) \end{cases}$$

est deux fois continuement dérivable.

c) En déduire que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} f(x) \frac{\sin (2n+1) x}{\sin x} dx = A (f(o) + f(\pi))$$

5) a) Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} dx = \pi$ $(n \in \mathbb{N})$ (On explicitera pour cela $\frac{\sin (2n+1) x}{\sin x}$ sous la forme $\frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x +$ .....+ 2 cos 2nx)

b) En déduire que $A = \frac{\pi}{2}$

6) Calculer pour tout $m \in \mathbb{R}$ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin m x}{x} dx$

7) a) Soient a et b 2 réels distincts. Déterminer un réel c tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(o) = c \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Etablir la convergence de l'intégrale impropre

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$$

c) Exprimer I (a, b), en utilisant le résultat de I 6), en fonction de $|a|$ et $|b|$

T.S.V.P. ⟶

d) Vérifier que, pour tout couple (α, β) de réels, l'intégrale impropre $J(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx$ est convergente et déduire des résultats précédents qu'elle a pour valeur:

$$J(\alpha; \beta) = \frac{\pi}{4} \left(|\alpha + \beta| - |\alpha - \beta| \right)$$

- II -

Soit x un réel donné dans l'intervalle [0, 1]

1) La fonction g_x de la variable y, définie sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$\begin{cases} g_x(y) = \frac{2}{\pi y^2} (\sin xy - x \sin y) \text{ si } y \neq 0 \\ g_x(0) = 0 \end{cases}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

2) Soit (ψ_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$\psi_n(t) = \int_0^n g_x(y) \sin ty \, dy$$

a) Vérifier que la fonction f_x de la variable réelle t définie par:

$$f_x(t) = \int_0^{+\infty} g_x(y) \sin ty \, dy$$

est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Prouver que chacune des fonctions ψ_n est continue.

c) Montrer que la suite de fonctions (ψ_n) converge uniformément vers la fonction f_x sur un intervalle que l'on précisera.

d) Prouver que la fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}$.

e) Calculer la valeur de la fonction f_x en tout point de $\mathbb{R}+$ (on distinguera 3 cas : $t \leq x$; $x \leq t \leq 1$; $t \geq 1$). Cette fonction est-elle paire ? Impaire ?

3) Déterminer l'ensemble E des points t de $\mathbb{R}$ où f_x est dérivable, et donner, pour chacun d'eux, la valeur de sa dérivée $f_x'(t)$

T.S.V.P. ⟶

4) Vérifier que l'intégrale impropre:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy - x \sin y}{y} \cos ty \, dy$$

est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Calculer sa valeur.

- III -

Soit K la fonction des 2 variables réelles x et t définie pour $x \in [0,1]$ et $t \in [0,1]$ par : $K(x,t) = \begin{cases} t(1-x) \text{ pour } t \leq x \\ x(1-t) \text{ pour } t \geq x \end{cases}$

1) A toute fonction réelle φ définie et continue sur [0,1] on associe la fonction réelle Φ définie sur [0,1] par:

$$\Phi(x) = \int_0^1 K(x,\theta)\, \varphi(\theta)\, d\theta$$

Donner les valeurs de $\Phi(0)$ et $\Phi(1)$. Prouver que Φ est deux fois continuement dérivable sur [0,1] et donner les expressions des dérivées d'ordre 1 et 2.

2) Dans le cas particulier où $\varphi(x) = \sin xy$ ($y \in \mathbb{R}$), calculer $\Phi(x)$ pour tout $x \in [0,1]$

3) En utilisant les résultats du II, donner, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, la valeur de l'intégrale:

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 K(x,\theta) \sin \theta y \sin ty \, d\theta \right) dy$$

4) Soit (b_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$b_n = 2 \int_0^1 K(x,t) \sin n\pi t \, dt$$

Donner la valeur de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que l'on a, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $t \in [0,1]$

$$K(x,t) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\pi x \sin n\pi t$$